A FÓRMULA DO PRODUTO DE EULER

FERNANDO FERREIRA

A função zeta ζ de Riemann definida para os números complexos s com $Re(s) > 1$ é dada por:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Se $s = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, note-se que n^s é o número complexo $n^x e^{iy \ln n}$. Logo, $|n^s| = n^x$. Daqui sai que a série acima é absolutamente convergente pois, como é sabido, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ é convergente quando $x > 1$ (para $x = 1$ tem-se a série harmónica, que é divergente). Como iremos ver, a função ζ tem uma ligação estreita aos números primos e ao teorema fundamental da aritmética. Ela foi primeiramente considerada por Leonhard Euler para valores $s \in \mathbb{N}$, $s \neq 1$. Chebyshev estendeu a função para os números reais maiores do que 1. Em 1859, Bernard Riemann publicou um célebre artigo em que não somente considerou a função zeta como função de variável complexa, como mostrou que ζ tem uma continuação analítica a $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, com um polo simples em 1. Este facto abriu o estudo da distribuição dos números primos às técnicas da análise complexa.

Fixe-se s um número complexo s com $Re(s) > 1$. As séries que vamos considerar de seguida são convergentes (de facto, absolutamente convergentes) e admitem manipulações bem conhecidas (p. ex., a soma de duas séries é dada pela série da soma). Tem-se:

$$\text{(i)} \qquad \frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots$$

Logo, subtraindo (i) de $\zeta(s)$, tem-se

$$\text{(ii)} \qquad \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$$

Vem:

$$\text{(iii)} \qquad \frac{1}{3^s}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \cdots$$

Agora, subtraindo (iii) de (ii), vem:

$$\text{(iv)} \qquad \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$$

Nos denominadores das parcelas $\frac{1}{n^s}$ da série (iv) aparecem exatamente os naturais n tais que $2 \nmid n$ e $3 \nmid n$. Se agora multiplicarmos (iv) por $\frac{1}{5^s}$ ficamos com

$$\text{(v)} \qquad \frac{1}{5^s}\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \frac{1}{35^s} + \frac{1}{55^s} + \cdots$$

Nos denominadores das parcelas $\frac{1}{n^s}$ da série acima aparecem obviamente os números naturais da forma $5n$ onde $2 \nmid n$ e $3 \nmid n$. Pelo teorema de Euclides, é claro que também se tem $2 \nmid 5n$ e $3 \nmid 5n$. Assim, as parcelas de (v) ocorrem em (iv) e, ao efetuarmos a subtração de (v) por (iv), ficamos com:

$$\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \cdots$$

onde, nos denominadores das parcelas $\frac{1}{n^s}$ desta série, aparecem exatamente os naturais n tais que $2 \nmid n$, $3 \nmid n$ e $5 \nmid n$. Em geral, se formos até ao primo q, temos

$$(\S) \qquad \zeta(s) \prod_{\substack{p \leqslant q \\ p \ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1 \ + \sum_{\substack{n>1 \ e \\ para\, todo\, p\, primo\, com\, p \leqslant q,\ p \nmid n}} \frac{1}{n^s}$$

Deve observar-se que a dedução desta fórmula utiliza de forma essencial o teorema de Euclides (que está na base da demonstração do teorema fundamental da aritmética).

Se nos fosse permitido "passar ao limite" ficaríamos com

$$(\star) \qquad \zeta(s) \prod_{p \ primo} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1$$

Esta é a *fórmula do produto de Euler*, mais comummente apresentada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \ primo} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

válida para números complexos s com $Re(s) > 1$. Muitas vezes descreve-se esta igualdade como sendo a formulação analítica do teorema fundamental da aritmética.

A fórmula não foi deduzida de forma rigorosa (a tal "passagem ao limite") e nem sequer demos um significado ao produtório infinito $\prod_{p \ primo} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$. Este produtório deve ser entendido como sendo o limite

$$\lim_k \prod_{\substack{p \leqslant k \\ p \ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Na fórmula $(\star)$ afirma-se que este limite existe e que verifica a igualdade da fórmula. O mesmo se passa na apresentação mais comum da fórmula do produto de Euler, em que aparece o produtório dos inversos. De seguida justificamos rigorosamente a fórmula $(\star)$.

Por $(\S)$, para qualquer natural k tem-se

$$\left| \zeta(s) \prod_{\substack{p \leqslant k \\ p \ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - 1 \right| \leqslant \sum_{\substack{n>1 \ e \\ para\, todo\, p\, primo\, com\, p \leqslant k,\ p \nmid n}} \frac{1}{|n^s|} \ \leqslant \ \sum_{n>k} \frac{1}{|n^s|}$$

A última desigualdade justifica-se porque se $n \leqslant k$ e $n > 1$ então existe um primo p com $p \leqslant k$ e $p \mid n$. Em suma, as parcelas da primeira série (de termos positivos) aparecem nas parcelas (de termos positivos) da última série. Dado que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|}$ converge, as somas finais desta série convergem para zero, i.e., $\lim_k \sum_{n>k} \frac{1}{|n^s|} \to 0$. Logo

$$\lim_k \ \zeta(s) \prod_{\substack{p \leqslant k \\ p \ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1$$

Em particular, $\zeta(s) \neq 0$. Agora, multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{\zeta(s)}$, vem

$$\lim_k \prod_{\substack{p \leqslant k \\ p \ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

i.e., o limite $\prod_{p \ primo} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ existe e é igual a $\frac{1}{\zeta(s)}$. Daqui sai $(\star)$ e, consequentemente, a forma mais comum da fórmula de Euler.

A fórmula do produto de Euler permite dar uma nova demonstração da infinitude dos primos. O resultado sai "à papo-seco" se pusermos $s = 1$ nessa fórmula, pois ficaria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \ primo} \frac{1}{1-p^{-1}}$.

Dado que o lado esquerdo é infinito, teria que haver um número infinito de primos (para o lado direito vir também infinito). Este argumento é defeituoso, mas o leitor pode convencer-se de que tem emenda fácil (ponha s real a convergir para 1 por valores à sua direita). Com um pouco de mais trabalho, é mesmo possível mostrar o resultado mais forte de que a série $\sum_{p\ primo} \frac{1}{p}$ é divergente.

Vamos trabalhar com x um número real maior do que 1. Passando aos logaritmos na fórmula do produto de Euler, ficamos com

$$\ln \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{p\ primo} -\ln\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)$$

pois o logaritmo (por ser uma função contínua) comuta com o limite. Usando a expansão de Taylor $\ln(1-w) = -w - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} - \cdots$, que é válida para $|w| < 1$, vem

$$\ln \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{p\ primo} \left(\frac{1}{p^x} + \frac{1}{2p^{2x}} + \frac{1}{3p^{3x}} + \cdots\right) = \sum_{p\ primo} \frac{1}{p^x} + \sum_{p\ primo} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{nx}}$$

Analisemos a soma dupla acima. Tem-se:

$$\sum_{p\ primo} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{nx}} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nk^{nx}} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nk^{n}}$$

pois $x > 1$. Não é difícil de ver que a soma dupla final é convergente (ver um exercício). Assim, se por absurdo $\sum_{p\ primo} \frac{1}{p}$ tivesse soma finita, ter-se-ia para todo $x > 1$,

$$\ln \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant C$$

para uma certa constante C independente de x (note que $\frac{1}{p^x} \leqslant \frac{1}{p}$, para $x > 1$). Ora, para $x > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant \int_1^{\infty} \frac{1}{y^x}\, dy = \frac{1}{x-1}$$

Concluir-se-ia $\frac{1}{x-1} \leqslant e^C$ para todo $x > 1$. Isto é absurdo.